Двойные когомологии момент-угол-комплексов

На основе совместных работ с А. Бари, И. Лимонченко, Дж. Сонгом и Д. Стенли

Т. Е. Панов

Московский государственный универстистет

Международная школа
Торическая топология, комбинаторика и анализ данных
ММИ им. Эйлера, С-Петербург, 3–9 октября 2022

1. Предварительные сведения

$\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, $\varnothing \in \mathcal{K}$.
$I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ – грань (симплекс).
Предполагаем $\varnothing \in \mathcal{K}$ и $\{i\} \in \mathcal{K}$ для $i = 1, \dots, m$.

$\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$ – категория граней $\mathcal{K}$, с объектами $I \in \mathcal{K}$ и морфизмами $I \subset J$.
Для $I \in \mathcal{K}$ положим

$$(D^2, S^1)^I \colon \{(z_1, \dots, z_m) \in (D^2)^m \colon |z_j| = 1 \text{ при } j \notin I\} \subset (D^2)^m.$$

Заметим, что $(D^2, S^1)^I \subset (D^2, S^1)^J$ при $I \subset J$. Получаем диаграмму

$$\mathscr{D}_{\mathcal{K}} \colon \mathrm{CAT}(\mathcal{K}) \to \mathrm{TOP},$$

отображающую $I \in \mathcal{K}$ в $(D^2, S^1)^I$.

Момент-угол-комплекс, соответствующий $\mathcal{K}$, есть

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \operatorname{colim} \mathscr{D}_K = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I \subset (D^2)^m.$$

Кольцо граней (кольцо Стенли–Райснера) комплекса $\mathcal{K}$ есть

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] := \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ порождён мономами $\prod_{i \in I} v_i$ с $I \notin \mathcal{K}$.

Теорема

Имеем изоморфизм биградуированных алгебр

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}\big) \\ &\cong H\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big) \\ &\cong \bigoplus_{I \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I). \end{aligned}$$

Здесь $\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big)$ – *комплекс Кошуля с* $\operatorname{bideg} u_i = (-1, 2)$, $\operatorname{bideg} v_i = (0, 2)$ *и* $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.

$\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I)$ *обозначает группы приведённых симплициальных когомологий полного подкомплекса* $\mathcal{K}_I \subset \mathcal{K}$ *(ограничения* $\mathcal{K}$ *на* $I \subset [m]$*).*

Для биградуированных компонент когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ имеем

$$H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]\colon |I|=\ell} \widetilde{H}^{\ell-k-1}(\mathcal{K}_I), \quad H^p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{-k+2\ell=p} H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Рассмотрим следующее факторкольцо:

$$R^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]\big/(v_i^2 = u_iv_i = 0,\ 1\leqslant i\leqslant m).$$

Тогда $R^*(\mathcal{K})$ имеет конечный ранг как абелева группа, с базисом из мономов u_Jv_I, где $J\subset[m]$, $I\in\mathcal{K}$ и $J\cap I=\varnothing$.

Кроме того, $R^*(\mathcal{K})$ можно отождествить с клеточными коцепями $C^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ момент-угол комплекса относительно стандартного клеточного разбиения, факторизуемый идеал $(v_i^2 = u_iv_i = 0,\ 1\leqslant i\leqslant m)$ является d-инвариантным и ацикличным, и мы имеем изоморфизм колец

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H\big(R^*(\mathcal{K}), d\big).$$

Введённые выше конструкции колец функториальны:

Предложение

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$ и $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ – подкомплекс на ℓ вершинах. Вложение $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ индуцирует вложение $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и гоморфизмы (дифференциальных) градуированных колец

а) $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] \to \mathbb{Z}[\mathcal{L}]$,

б) $(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d) \to (\Lambda[u_1, \ldots, u_\ell] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{L}], d)$,

в) $(R^*(\mathcal{K}), d) \to (R^*(\mathcal{L}), d)$,

г) $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \to H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}})$,

где u_i, v_i переходят в 0 при $i \notin [\ell]$.

Кроме того, если $\mathcal{K}_I$ – полный подкомплекс на $I \subset [m]$, то мы имеем ретракцию $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_I}$ и гомоморфизмы

д) $\mathbb{Z}[\mathcal{K}_I] \to \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$,

е) $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_I}) \to H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Имеются также гомологические версии этих гомоморфзимов.

2. Двойные (ко)гомологии

Мы имеем
$$H_p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}_{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I),$$
Для каждого $j \in [m] \setminus I$ рассмотрим гомоморфизм
$$\phi_{p;I,j}\colon \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_{I\cup\{j\}}),$$
индуцированный вложением $\mathcal{K}_I \hookrightarrow \mathcal{K}_{I\cup\{j\}}$. Определим
$$\partial'_p = (-1)^{p+1} \bigoplus_{I\subset[m],\, j\in[m]\setminus I} \varepsilon(j,I)\,\phi_{p;I,j},$$
где
$$\varepsilon(j,I) = (-1)^{\#\{i\in I\colon\, i<j\}}.$$

Лемма

Для $\partial'_p\colon \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I) \to \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I)$ *имеем* $(\partial'_p)^2 = 0$.

Таким образом, получаем цепной комплекс

$$CH_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) := (H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \partial'),$$

где

$$\partial' \colon \widetilde{H}_{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to \widetilde{H}_{-k-1,2\ell+2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$$

по отношению к следующему биградуированному разложению $H_p(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$:

$$H_p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{-k+2\ell=p} H_{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \quad H_{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]\colon |I|=\ell} \widetilde{H}_{\ell-k-1}(\mathcal{K}_I).$$

Определим биградуированные двойные гомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ как

$$HH_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \partial').$$

Для групп когомологий, рассмотрим для $i \in I$ гомоморфизм

$$\psi_{p;i,I}\colon \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_{I\setminus\{i\}}),$$

индуцированный вложением $\mathcal{K}_{I\setminus\{i\}} \hookrightarrow \mathcal{K}_I$, и положим

$$d'_p = (-1)^{p+1} \sum_{i \in I} \varepsilon(i, I)\psi_{p;i,I}.$$

Введём $d'\colon H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ в разложении $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{I \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I)$:

$$d'\colon H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^{-k+1,2\ell-2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Имеем $(d')^2 = 0$, что превращает $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ в коцепной комплекс

$$CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) := (H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d').$$

Определим биградуированные двойные когомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ как

$$HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H\big(H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d'\big).$$

3. Бикомплексы

Для $I \subset [m]$, пусть $C^p(\mathcal{K}_I)$ – группа p-х симплициальных коцепей $\mathcal{K}_I$.

Обозначим через $\alpha_{L,I} \in C^{q-1}(\mathcal{K}_I)$ базисную коцепь, соответствующую ориентированному симплексу $L = (\ell_1, \ldots, \ell_q) \in \mathcal{K}_I$; она принимает значение 1 на L и обращается в нуль на остальных симплексах.

Симплициальное кограничное отображение (дифференциал) $d\colon C^p(\mathcal{K}_I) \to C^{p+1}(\mathcal{K}_I)$ есть

$$d\alpha_{L,I} = \sum_{j \in I \setminus L,\, L \cup \{j\} \in \mathcal{K}} \varepsilon(j, L)\alpha_{L \cup \{j\}, I}.$$

Рассмотрим $\psi_{p;i,I}\colon C^p(\mathcal{K}_I) \to C^p(\mathcal{K}_{I \setminus \{i\}})$, индуцированный вложением $\mathcal{K}_{I \setminus \{i\}} \hookrightarrow \mathcal{K}_I$, и определим

$$d'_p = (-1)^{p+1} \sum_{i \in I} \varepsilon(i, I)\psi_{p;i,I}.$$

Напомним, что дифференциал d в комплексе Кошуля $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ имеет бистеперь $(1,0)$ и задаётся как

$$du_j = v_j,\quad dv_j = 0,\qquad \text{при } j=1,\ldots,m.$$

Введём второй дифференциал d' бистепени $(1,-2)$ на $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ по правилу

$$d'u_j = 1,\quad d'v_j = 0,\qquad \text{при } j=1,\ldots,m,$$

и продолжая по формуле Лейбница. В явном виде значение d' на мономах u_Jv_I задаётся как

$$d'(u_Jv_I)=\sum_{j\in J}\varepsilon(j,J)u_{J\setminus\{j\}}v_I,\quad d'(v_I)=0.$$

Дифференциал d' ограничивается на подмодуль $R^*(\mathcal{K})\subset\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, порождённый мономами u_Jv_I с $J\cap I=\varnothing$. Однако идеал $\bigl(v_i^2=u_iv_i=0,\ 1\leqslant i\leqslant m\bigr)$ не является d'-инвариантным и $(R^*(\mathcal{K}),d')$ не является д. г. кольцом.

Лемма

Относительно дифференциалов d и d', введённых выше, $\big(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d, d'\big)$, $\big(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}], d, d'\big)$ и $\big(R^*(\mathcal{K}), d, d'\big)$ являются бикомплексами, т. е. d и d' удовлетворяют соотношению $dd' = -d'd$.

По определению, $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ суть первые двойные когомологии бикомплекса $\big(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d, d'\big)$:

$$HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H\Big(H\Big(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d\Big), d'\Big).$$

Теорема

Бикомплексы $\left(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d, d'\right)$ *и* $\left(R^*(\mathcal{K}), d, d'\right)$ *изоморфны. Следовательно,* $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ *изоморфны первым двойным когомологиям бикомплекса* $\left(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}], d, d'\right)$*:*

$$HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H\Big(H\big(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big), d'\Big).$$

Доказательство (набросок).

Определим гомоморфизм

$$\begin{aligned} f\colon C^{q-1}(\mathcal{K}_I) &\longrightarrow R^{q-|I|,2|I|}(\mathcal{K}),\\ \alpha_{L,I} &\longmapsto \varepsilon(L,I)\, u_{I\setminus L}v_L, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(L,I)=\prod_{i\in L}\varepsilon(i,I)=(-1)^{\sum_{\ell\in L}\#\{i\in I\colon\, i<\ell\}}$.
Тогда f является изоморфизмом групп и коммутирует с d и d'.
Поэтому имеем изоморфизм бикомплексов

$$f\colon \Big(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d, d'\Big) \longrightarrow \big(R^*(\mathcal{K}), d, d'\big). \qquad \square$$

Следствие

Двойные когомологии $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ *являются градуированным коммутативным кольцом, с операцией умножения, индуцированной умножением в* $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Предложение

а) *d'-когомологии комплекса $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ нулевые:*

$$H\bigl(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}],d'\bigr)=0.$$

б) *Если $\mathcal{K}\ne\Delta^{m-1}$ (не полный симплекс на $[m]$), то d'-когомологии бикомплексов $\bigoplus_{I\subset[m]}C^*(\mathcal{K}_I)$ и $R^*(\mathcal{K})$ нулевые:*

$$H\Bigl(\bigoplus_{I\subset[m]}C^*(\mathcal{K}_I),d'\Bigr)=H\bigl(R^*(\mathcal{K}),d'\bigr)=0.$$

Следовательно, вторые двойные когомологии бикомплексов $\bigl(\bigoplus_{I\subset[m]}C^*(\mathcal{K}_I),d,d'\bigr)$ и $\bigl(R^*(\mathcal{K}),d,d'\bigr)$ нулевые при $\mathcal{K}\ne\Delta^{m-1}$.

в) *Если $\mathcal{K}=\Delta^{m-1}$, то единственной ненулевой группой d'-когомологий комплексов $\bigoplus_{I\subset[m]}C^*(\mathcal{K}_I)$ и $R^*(\mathcal{K})$ является $H^{2m}\cong\mathbb{Z}$, порождённая классами $\alpha_{[m],[m]}$ и $v_1\cdots v_m$, соответственно.*

Предложение

Пусть $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ – симплициальные комплексы на одном множестве вершин $[m]$. Имеют место гомоморфизмы

а) $\big(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}],d,d'\big)\to\big(\Lambda[u_1,\dots,u_\ell]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{L}],d,d'\big)$,

б) $\big(R^*(\mathcal{K}),d,d'\big)\to\big(R^*(\mathcal{L}),d,d'\big)$,

в) $CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\to CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{L})$,

г) $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\to HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{L})$.

Кроме того, если $\mathcal{K}_I$ – полный подкомплекс на $I\subset[m]$, то имеем гомоморфизмы

д) $\big(\Lambda[u_i\colon i\in I]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}_I],d,d'\big)\to\big(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}],d,d'\big)$,

е) $\big(R^*(\mathcal{K}_I),d,d'\big)\to\big(R^*(\mathcal{K}),d,d'\big)$,

ж) $CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_I})\to CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$,

з) $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_I})\to HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

Имеются также гомологические версии этих гомоморфизмов, которые отображают H_*, CH_* и HH_* в другую сторону.

4. Связь с действием тора

Пусть на пространстве X задано действие окружности $S^1 \times X \to X$. Тогда индуцированный гомоморфизм когомологий имеет вид

$$H^*(X) \to H^*(S^1 \times X) = \Lambda[u] \otimes H^*(X), \quad \alpha \mapsto 1 \otimes \alpha + u \otimes \iota(\alpha),$$

где $u \in H^1(S^1)$ – образующая, а $\iota\colon H^*(X) \to H^{*-1}(X)$ – диф-ние.

Предложение

Дифференцирование, задаваемое действием i-й координатной окружности $S^1_i \times \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, индуцируется дифференцированием ι_i комплекса $(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$ задаваемым на образующих как

$$\iota_i(u_j) = \delta_{ij}, \quad \iota_i(v_j) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Дифференцирование, задаваемое действием диагональной окружности $S^1_d \times \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, совпадает с дифференциалом d'.

Доказательство.

Действие i-й координатной окружности $S^1_i \times \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ можно представить как отображение момент-угол-комплексов $\varphi_\mathcal{Z} \colon \mathcal{Z}_{(\varnothing,\{i'\})\sqcup\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, индуцированное симплициальным отображением $\varphi\colon (\varnothing, \{i'\}) \sqcup \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, переводящим «отсутствующую» вершину i' в i. Соответствующее отображение комплексов Кошуля имеет вид

$$\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] \to \Lambda[u_i'] \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}],$$

где $u_i \mapsto u_i' + u_i = 1 \otimes u_i + u_i' \otimes 1$, $u_j \mapsto 1 \otimes u_j$ при $j \neq i$ и $v_j \mapsto 1 \otimes v_j$ для любого j. Здесь u_i' представляет образующую в $H^1(S^1_i)$. Это доказывает первое утверждение.

Второе утверждение следует из того, что дифференцирование, задаваемое диагональным действием, есть сумма дифференцирований, задаваемых действиям координатных окружностей. $\square$

5. Методы вычисления $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$

Имеется несколько методов практического вычисления двойных когомологий $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Мы покажем, что $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ одномерно тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ – полный симплекс, и опишем несколько классов симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ двумерно. Мы также покажем, что размерность $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ может быть сколь угодно большой.

Предложение

Следующие условия эквивалентны для симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве вершин $[m]$:

а) *все полные подкомплексы в $\mathcal{K}$ ацикличны;*

б) $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$ *и* $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2)^m$*;*

в) $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ *ацикличен;*

г) $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = HH^{0,0}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$.

Предложение

Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$ *– граница симплекса. Тода*

$$HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } (-k,2\ell) = (0,0),\ (-1,2m); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ *и* $\mathcal{L}$ *таковы, что либо* $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$*, либо* $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}})$ *свободно. Тогда имеем изоморфизм цепных комплексов*

$$CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}*\mathcal{L}}) \cong CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}).$$

В частности, имеем $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}*\mathcal{L}}; k) \cong HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; k) \otimes HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}; k)$ *с коэффициентами в поле.*

В предыдущих примерах $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ ведут себя аналогично $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Следующий пример показывает их существенное различие.

Теорема

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \sqcup pt$ – несвязное объединение непустого комплекса $\mathcal{K}'$ и точки. Тогда

$$HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{при } (-k,2\ell)=(0,0),\ (-1,4); \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В более общей ситуации имеет место

Теорема

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup_\sigma \Delta^n$ получен из непустого $\mathcal{K}'$ добавлением n-симплекса вдоль собственной, возможно пустой, грани $\sigma \in \mathcal{K}$. Тогда либо $\mathcal{K}$ есть симплекс, либо

$$HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{при } (-k,2\ell)=(0,0),\ (-1,4); \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема

Следущие условия эквивалентны для комплекса $\mathcal{K}$:

а) *все полные подкомплексы в $\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентны дискретному набору точек;*

б) *$\mathcal{K}$ является флаговым, а его 1-остов $\mathrm{sk}^1(\mathcal{K})$ есть хордовый граф;*

в) *$\mathcal{K}$ получается из симплекса итерированием процедуры приклейки симплекса вдоль общей (возможно, пустой) грани.*

Каждое из этих условий влечёт, что либо $\mathcal{K}$ есть симплекс, либо

$$HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } (-k,2\ell)=(0,0),\ (-1,4); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

6. Случай m-цикла

Пусть $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$ – момент-угол-комплекс, соответствующий m-циклу (границе m-угольника) $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$ гомеоморфен связной сумме проиведений сфер:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}} \cong \mathop{\#}_{k=3}^{m-1} \left(S^k \times S^{m+2-k}\right)^{\#(k-2)\binom{m-2}{k-1}}.$$

Теорема

Пусть $\mathcal{L}$ – m-цикл, где $m \geq 5$. Тогда $HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}})$ есть $\mathbb{Z}$ в размерностях $(-k, 2\ell) = (0,0)$, $(-1,4)$, $(-m+3, 2(m-2))$, $(-m+2, 2m)$ и 0 в остальных случаях.

7. Дальнейшие наблюдения, примеры и вопросы

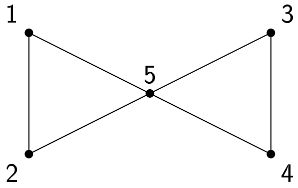
Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется разложимым в букет, если его можно представить в виде объединения $\mathcal{L} \cup_{\Delta^t} \mathcal{M}$ комплексов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ вдоль непустой грани Δ^t, отличной от всего $\mathcal{K}$.

Вопрос

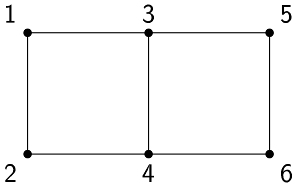
Как мы видели, если $\mathcal{L}$ или $\mathcal{M}$ есть симплекс, то $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ в размерностях $(0,0)$ и $(-1,4)$. Верно ли это для любого $\mathcal{K}$, разложимого в букет? Существуют ли другие $\mathcal{K}$ с такими двойными когомологиями?

Заметим, что если $\mathcal{K}$ – граница симплекса, то $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, но размерность, в которой появляется второе слагаемое $\mathbb{Z}$, отличается.

Вот два примера комплексов $\mathcal{K}$ с $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ в размерностях $(0,0)$ и $(-1,4)$. Они не покрываются предыдущими результатами, но являются разложимыми в букет.



(a) Не флаговый, хордовый.



(b) Флаговый, не хордовый

Предложение

Если $\mathcal{K}$ – горенштейнов комплекс над полем $\mathbb{F}$, то двойные когомологии $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ являются алгеброй Пуанкаре. В частности, если $\mathcal{K}$ горенштейнов размерности $(n-1)$, то*

$$\dim HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F}) = \dim HH^{-(m-n)+k,2(m-\ell)}(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F}).$$

Обратное утверждение неверно, в отличие от ситуации с обычными когомологиями $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Например, если $\mathcal{K}$ – набор из m точек, то $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ – алгебра Пуанкаре, но $\mathcal{K}$ не горенштейнов при $m>2$.

Вопрос

Дать гомологическую характеризацию симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых двойные когомологии $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ являются алгеброй Пуанкаре.

Литература

[1] Ivan Limonchenko, Taras Panov, Jongbaek Song and Donald Stanley. *Double cohomology of moment-angle complexes.* arXiv:2112.07004.

[2] Anthony Bahri, Ivan Limonchenko, Taras Panov, Jongbaek Song and Donald Stanley. *Bigraded barcodes.* In preparation.